Calcul de $y = e^{x} = \left(e^{\frac{x}{2^N}}\right)^{2^N}$

Prendre $N : x_N = \frac{x}{2^N} \sim 2^{-\sqrt{\chi}}$ $\quad (N = 0$ si $|x| < 2^{-\sqrt{\chi}})$

Puis $y_N = e^{x_N} = \left(1 + \frac{X}{1} + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3!} + \dots + \frac{X^p}{p!}\right)$ à $2^{-N-\chi}$ près

$X \sim 2^{-\sqrt{\chi}}$

$2^{-(N+\chi)}$ $\quad$ $\cancel{X} 2^{N+\chi}$ $\quad$ $x_0 2 \cancel{X}$

et $y = \underbrace{\left(\left(\left(e^{x_N}\right)^2\right)^2 \dots\right)^2}_{N}$ $\qquad \frac{\Delta y}{y} = 2^N \Delta x_N$

Calcul de $y_0 = \sin x_0$ $\qquad 0 \leq x < \pi$

$x_i = \frac{x_{i-1}}{2}$ $\qquad y_{i-1} = 2 y_i \sqrt{1 - y_i^2}$

$y_i = \sin x_i$

$y_N = \sin x_N = x_N \left(1 + \frac{X}{3!} + \frac{X^2}{5!} + \frac{X^4}{7!} + \dots\right)$ $\qquad X = -x_N^2$

$N : \; x_N \sim 2^{-\sqrt{\chi}}$

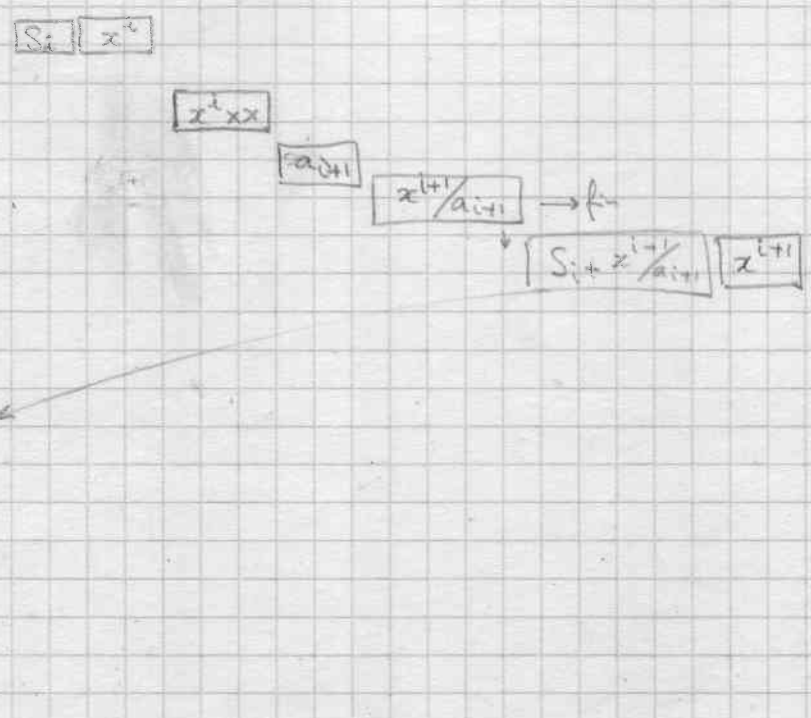
<u>Schéma général</u>

1°] $x_0 \longrightarrow x_N = \underbrace{g(g(g(x_0)))}_{N}$ N tel que $x_N \sim 2^{-\sqrt{\chi}}$

2°] Série en $x_N \quad \rightarrow y_N$

3°] Calcul de $y_0 = \underbrace{f(f(\dots f(y_N))))}_{N}$

$\pi = 4 \operatorname{Arctg}(1)$



Calcul de y_p à partir de y_{p-1} avec $\Delta y_p = 2^{-(\chi+p)} x_0$

$$y_p = \frac{\sqrt{1+y_{p-1}^2}-1}{y_{p-1}}$$

$$\sqrt{1+y_k^2} - 1 \sim \frac{y_k^2}{2} \sim 2^{-2k-1-2u} = 2^{-2k-1-2u-\chi} \underbrace{A}_{\chi} \longrightarrow A = \sqrt{B} - 2^{2k+1+2u}$$

$$1+y_k^2 = 2^{-4k-2-4u-2\chi} \underbrace{B}_{4k+2+4u+2\chi} \qquad B = 2^{4k+2+4u+2\chi} + C$$

(à cause de 1)

$$y_k^2 = 2^{-4k-2-4u-2\chi} \underbrace{C}_{2k+2u+2+2\chi} \qquad C = D^2$$

$$y_k = 2^{-2k-1-2u-\chi} \underbrace{D}_{k+u+1+\chi}$$

Calcul de $y = \text{Log}\, x$ ($x>1$) à $\Delta x = 2^{-\chi}$ $\qquad x = x_0^{2^{+m}} \qquad x_0 - 1 \sim 2^{-u}$

$0 \leq m \qquad 1 \leq x_0 < 2 \qquad (x \sim 2^{2^m})$

$$\text{Log}\, x_0 = 2^N \,\text{Log}\left((x_0)^{2^{-N}}\right) \qquad x_i = \sqrt{x_{i-1}}$$

$$x_N = x_0^{2^{-N}} \qquad x_i \sim 1 + 2^{-i-u}$$

Calcul de $y_N = -X\left(1+\frac{X}{2}+\frac{X^2}{3}+\frac{X^3}{4}+\dots+\frac{X^p}{p+1}\right)$ $\qquad x_N = 1-X$

à $\Delta y_N = 2^{-(N+\chi)}$

$$X \sim 2^{-N-u} \qquad X = 2^{-N-u-\chi}\underbrace{A}_{\chi}$$

Calcul de $\sqrt{x_k} \sim 1 + 2^{-k-u-1} = 2^{-k-\chi-u-1}\left(\underbrace{2^{k+\chi+u+1}} + \underbrace{A}_{\chi}\right)$

$$x_k = 2^{-2k-2\chi-2u-2}\underbrace{B}$$

si $u>1$

$$x_0 = 2^{\underbrace{u-\chi+\varepsilon}_{\text{pair}}} \underbrace{A}_{2\chi+\varepsilon} \to x_1\, 2^{\frac{u-\varepsilon}{2}-\chi}\underbrace{B}_{\chi+\varepsilon}$$

Etape 1 : Calcul de x_0 par une racine près χ

Etape 2 : $x_0 = 2^{-2\chi-2u-2}\underbrace{C} \to x_1 = 2^{-\chi-u-1}\sqrt{C}$

$$x_1 = 2^{-2\chi-2u-4} D \longrightarrow \sqrt{D}$$

$x_0 - 1_{\sqrt{\chi}} \to \qquad x_i = \sqrt{x_{i-1}}$ $\qquad$ arrêt qd $u \simeq \sqrt{\chi}$

et $X_n = 2^{-\chi}\underbrace{A}_{\chi-\sqrt{\chi}}$

Calcul de $y=\sqrt{x}$ à la précision $\Delta y = 2^{-\psi}$ $\underbrace{A}_{\theta}$ indique qu'il y a $\theta+1$ chiffres dans l'entier A

$x = 2^{\alpha} \underbrace{A}_{2\psi \text{ ou } 2\psi+1}$ $y = 2^{\alpha}\sqrt{A}$

Calcul de $x_0 = \text{Arctg}(y_0)$ à $\frac{\Delta x_0}{x_0} = 2^{-\psi}$ $(0 < y_0 \leqslant \infty)$

Posons $x_k = \frac{x_{k-1}}{2}$ $x_k = \text{Arctg}(y_k)$ $y_k \sim 2^{-k} x_0$

Donc si $1 \leqslant y_0 < \infty$ $u = -1$

si $\frac{1}{2} \leqslant y_0 < 1$ $u = 0$

si $\frac{1}{4} \leqslant y_0 < \frac{1}{2}$ $u = 1$ etc

étapes
1°) Choix de N etc
2°) Calcul de y_N à $\Delta y_N = 2^{-(\chi+N)} x_0$ $\chi = \psi + h$ $\left(\sum_{\text{erreurs}} 2^{-h} = 1\right)$ $h = 2\sqrt{\chi}$
3°) Calcul de x_N à $\Delta x_N = 2^{-(\psi+N)} x_0$ d'où $x_0 = \frac{x_N}{2^N}$ avec $\frac{\Delta x_0}{x_0} = 2^{-\psi}$

dans Étape 3 : $x_N = y_N\left(1 + \frac{Y}{3} + \frac{Y^2}{5} + \frac{Y^3}{7} + \dots + \frac{Y^p}{2p+1}\right)$ où $Y = -y_N^2$

On veut $\frac{Y^{p+1}}{2p+3} < 2^{-(\chi+N)}$ $Y \sim 2^{-2N} x_0^2$ $x_0 \sim 2^{-u}$

$1 < \frac{2^{-\chi+N(2p+1)+2(p+1)u}}{2p+3}$ $N \geqslant \frac{\chi}{2p} - u$

On prend $N + u = \underset{\text{cte}}{\alpha}\sqrt{\chi}$ $(N = 0 \text{ si } u > \alpha\sqrt{\chi})$

Calcul de la série à $\Delta S = 2^{-(\chi+N)} x_0$ $y_N = 2^{-(\chi+N)-u} \underbrace{A}_{\chi}$ $y_N \sim 2^{-N-u}$

$1 = 2^{-\chi} \underbrace{B}_{\chi}$

$Y = 2^{-\chi} \underbrace{C}_{\chi-2N-2u}$ $Y \sim 2^{-2N-2u}$

$Y^2 = 2^{-\chi} \underbrace{D}_{\chi-4N-4u}$ $Y^2 \sim 2^{-4N-4u}$

$B + \left[\frac{C}{3}\right] + \left[\frac{D}{5}\right] + \dots$ arrêt si zéro